Probe klausur 07/08

zu Aufgabe 4

Induktionsanfang: Sei $n = 1$. Dann gilt $\sum_{i=1}^{1}(4i-3) = 4-3 = 1$ und $1 \cdot (2 \cdot 1 - 1) = 1$. Es gilt also der Induktionsanfang.

Induktionsannahme: Sei $n \geq 1$ und $\sum_{i=1}^{n}(4i-3) = n(2n-1)$.

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1}(4i-3) &= \sum_{i=1}^{n}(4i-3) + 4(n+1) - 3\\ &= n(2n-1) + 4n + 1\\ &= 2n^2 + 3n + 1\\ &= (n+1)(2n+1)\\ &= (n+1)(2(n+1)-1).\end{aligned}$$

Wir haben also die Aussage „Wenn $\sum_{i=1}^{n}(4i-3) = n(2n-1)$, so folgt $\sum_{i=1}^{n+1}(4i-3) = (n+1)(2(n+1)-1)$" bewiesen, und mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt, dass $\sum_{i=1}^{n}(4i-3) = n(2n-1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

WS 07/08

zu Aufgabe 4

Für den Induktionsanfang sei $n = 1$. Es sind $\frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2\cdot 1+1} = \frac{1}{3}$. Es gilt somit der Induktionsanfang.

In der Induktionsannahme nehmen wir an, es sei $n \geq 1$ und es gelte $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)}\\ &= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)}\\ &= \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}.\end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt, dass die Formel für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig ist.

Nachklausur 07/08

zu Aufgabe 5

Für $n = 1$ gilt $\sum_{k=1}^{1} 2 \cdot 3^{k-1} = 2 \cdot 3^0 = 2$ und $3^1 - 1 = 2$. Es gilt somit der Induktionsanfang.

Im Induktionsschritt nehmen wir an, dass $\sum_{k=1}^{n} 2 \cdot 3^{k-1} = 3^n - 1$ für ein $n \geq 1$ gilt. Dann folgt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} 2 \cdot 3^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n} 2 \cdot 3^{k-1} + 2 \cdot 3^n \\ &= 3^n - 1 + 2 \cdot 3^n \\ &= 3^n(1+2) - 1 \\ &= 3^{n+1} - 1.\end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

WS 08/09

Aufgabe 1

Wir überprüfen den Induktionsanfang für $n_0 = 1$. Dann gilt $1 \cdot 1! = 1$ und $(1+1)! - 1 = 2! - 1 = 1$. Somit gilt der Induktionsanfang.

In der Induktionsannahme nehmen wir an, dass $n \geq 1$ und $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$ ist. Dann gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! + (n+1)(n+1)! \\ &= (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! \\ &= (n+1)!(1 + (n+1)) - 1 \\ &= (n+1)!(n+2) - 1 = (n+2)! - 1.\end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt, dass $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

SS 09

Aufgabe 1

Im Induktionsanfang sei $n_0 = 0$. Dann gilt $\sum\limits_{k=0}^{0} \frac{1}{(k+10)(k+11)} = \frac{1}{10 \cdot 11}$ und $\frac{1}{10} - \frac{1}{11} = \frac{1}{10 \cdot 11}$. Somit gilt der Induktionsanfang.

Die Induktionsvoraussetzung ist, dass für ein $n \geq 0$ die Formel $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+10)(k+11)} = \frac{1}{10} + \frac{1}{n+11}$ gilt.

Wir müssen zeigen, dass daraus $\sum\limits_{k=0}^{n+1} \frac{1}{(k+10)(k+11)} = \frac{1}{10} + \frac{1}{(n+1)+11} = \frac{1}{10} + \frac{1}{n+12}$ folgt.

Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{(k+10)(k+11)} &= \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+10)(k+11)} \right) + \frac{1}{((n+1)+10)((n+1)+11)} \\
&= \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{n+11}\right) + \frac{1}{(n+11)(n+12)} \\
&= \frac{1}{10} - \frac{1}{n+12}.
\end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

WS 09/10

Aufgabe 1

Sei $n_0 = 1$. Dann gilt $\frac{1}{1 \cdot (1+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$, der Induktionsanfang.

Induktionsannahme: Für ein $n \geq 1$ gilt $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Induktionsschritt: Zu zeigen ist

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \right) + \frac{1}{(n+1)((n+1)+1)} \\
&= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.
\end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt, dass die Formel für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

SS 10

Aufgabe 1

Sei $n_0 = 1$. Es gilt $\frac{1\cdot(1+1)}{2} = 1 = \frac{1\cdot(1+1)(1+2)}{6}$. Es gilt somit der Induktionsanfang.

Als Induktionsannahme nehmen wir an, dass $\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ für ein $n \geq 1$ gilt.

Im Induktionsschritt untersuchen wir, ob aus dieser Annahme folgt, dass $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)((n+1)+2)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$ ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k(k+1)}{2} &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2}\right) + \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} \text{ mit Induktionsannahme und Vereinfachen} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)+3(n+1)(n+2)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}.
\end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt, dass die Formel für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

WS 10/11

Aufgabe 1

Sei $n_0 = 2$. Dann gilt $2^2 = 4$ und $2 + 1 = 3$, also $2^2 > 2 + 1$, der Induktionsanfang.

Induktionsannahme: Für ein $n \geq 2$ gilt $n^2 > n + 1$.

Induktionsschritt: Zu zeigen ist

$$n^2 > n + 1 \Rightarrow (n+1)^2 > n + 2.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
(n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 > (n+1) + 2n + 1 \text{ (Induktionsannahme)} \\
&\geq (n+1) + 5, \text{ da } n \geq 2 \\
&> n + 2.
\end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt, dass $n^2 > n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, gilt.

Aufgabe 1

Im Induktionsanfang sei $n_0 = 1$. Dann ist $A^{n_0} = A$, und $\begin{pmatrix} 1 & n_0 & \frac{n_0(n_0-1)}{2} \\ 0 & 1 & n_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$. Es gilt also der Induktionsanfang.

Als Induktionsannahme nehmen wir an, dass $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ für ein $n \geq 1$ gilt.

Wir werden im Induktionsschritt zeigen, dass daraus $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \frac{(n+1)n}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ folgt.

Es gilt

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & n + \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir sind fertig, wenn wir zeigen können, dass $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$ ist. Das gilt aber, denn

$$n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2n + n^2 - n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{(n+1)n}{2}.$$

SS 12

Aufgabe 1

Wir beweisen die Behauptung mit Induktion nach n. Im Induktionsanfang sei $n_0 = 1$. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{2n_0-1} (-1)^{k+1}k^2 = \sum_{k=1}^{1}(-1)^{k+1}k^2 = (-1)^2 \cdot 1^2 = 1 = 1 \cdot (2-1) = n_0(2n_0 - 1).$$

Somit gilt der Induktionsanfang.

Als Induktionsannahme nehmen wir an, dass $\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k+1}k^2 = n(2n-1)$ für ein $n \geq 1$ gilt. Daraus müssen wir schließen, dass $\sum_{k=1}^{2(n+1)-1}(-1)^{k+1}k^2 = (n+1)(2(n+1)-1)$, also $\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k+1}k^2 = (n+1)(2n+1) = 2n^2+3n+1$ ist.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k+1}k^2 &= \sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k+1}k^2 + (-1)^{2n+1}(2n)^2 + (-1)^{2n+2}(2n+1)^2 \\
&\ \text{(Abspalten der letzten beiden Summanden)} \\
&= \sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k+1}k^2 - (2n)^2 + (2n+1)^2 \\
&\ \text{(denn } 2n+1 \text{ ist ungerade und } 2n+2 \text{ ist gerade)} \\
&= n(2n-1) - 4n^2 + 4n^2 + 4n + 1 \text{ (Induktionsannahme und Ausmultiplizieren)} \\
&= 2n^2 + 3n + 1 = (n+1)(2n+1).
\end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

SS 13

Aufgabe 4

Für den Induktionsanfang sei $n = 1$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit Quotientenregel

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{(e^x)^2} = \frac{1-x}{e^x} = (-1)\frac{x-1}{e^x},$$

also gilt der Induktionsanfang.

Als Induktionsannahme nehmen wir an, dass $f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{x-n}{e^x}$ für ein festes $n \in \mathbb{N}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Dann folgt (wieder mit Quotientenregel)

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)})'(x) = \left((-1)^n \frac{x-n}{e^x}\right)' = (-1)^n \frac{e^x - (x-n)e^x}{(e^x)^2} = (-1)^n \frac{1-(x-n)}{e^x} \\ &= (-1)^n \frac{-x+(n+1)}{e^x} = (-1)^{n+1} \frac{x-(n+1)}{e^x} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Dabei wurde beim zweiten Gleichheitszeichen die Induktionsannahme benutzt. Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

WS 13/14

Aufgabe 1

Im Induktionsanfang sei $n_0 = 1$. Dann ist $A^{n_0} = A$, und $\begin{pmatrix} 2^1 & 2^1 - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A = A^1$. Es gilt also der Induktionsanfang.

Als Induktionsannahme nehmen wir an, dass $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für ein $n \geq 1$ gilt. Daraus müssen wir schließen, dass $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 2^{n+1} - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ folgt. Es gilt aber tatsächlich

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n \cdot 2 + 0 & 2^n + (2^n - 1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 2 \cdot 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 2^{n+1} - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

SS 14

Aufgabe 1

Im Induktionsanfang sei $n_0 = 1$. Wir müssen die zweite Ableitung von f an der Stelle x berechnen.

Es ist $f'(x) = a(\cos(ax)) = a\cos(ax)$ mit der Kettenregel und weil $\sin' = \cos$ ist. Da $\cos' = -\sin$ ist, folgt wieder mit der Kettenregel $f''(x) = -a(a\sin(ax))$, also $f^{(2)}(x) = (-1)^1 a^2 \sin(ax)$. Somit gilt der Induktionsanfang.

Als Induktionsvoraussetzung nehmen wir an, dass $f^{(2n)}(x) = (-1)^n a^{2n}\sin(ax)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ist. Es ist zu zeigen, dass $f^{(2(n+1))}(x) = f^{(2n+2)}(x) = (-1)^{n+1}a^{2n+2}\sin(ax)$ ist.

Es gilt

$$\begin{aligned} f^{(2n+1)}(x) &= ((-1)^n a^{2n}\sin(ax))' \text{ mit Induktionsvoraussetzung} \\ &= (-1)^n a^{2n}(a\cos(ax)) \text{ mit Kettenregel und weil } \sin' = \cos \text{ ist} \\ &= (-1)^n a^{2n+1}\cos(ax) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f^{(2n+2)}(x) &= ((-1)^n a^{2n+1})(-a\sin(ax))) \text{ mit Kettenregel und weil } \cos' = -\sin \text{ ist} \\ &= (-1)^{n+1}a^{2(n+1)}\sin(ax). \end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

WS 14/15

Aufgabe 1

Im Induktionsanfang sei $n_0 = 1$. Dann ist $a_1 = 10 \geq 4$. Es gilt also der Induktionsanfang. Als Induktionsannahme nehmen wir an, dass $a_n \geq 4$ für ein $n \geq 1$ gilt. Daraus müssen wir schließen, dass $a_{n+1} \geq 4$ folgt. Es gilt aber (wegen der Monotonie der Wurzelfunktion) tatsächlich

$$a_{n+1} = 2 + \sqrt{2a_n - 1} \geq 2 + \sqrt{2 \cdot 4 - 1} = 2 + \sqrt{7} \geq 2 + \sqrt{4} = 4\ .$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

SS 15

Aufgabe 1

Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq a \leq 1$.

Für $n = 1$ gilt $(1+a)^1 = 1+a) \leq 1+(2^1-1)a = 1+a$. Es gilt somit der Induktionsanfang.

Als Induktionsvoraussetzung nehmen wir an, dass $(1+a)^n \leq 1 + (2^n - 1)a$ für ein $n \geq 1$ gilt. Im Induktionsschritt müssen wir zeigen, dass daraus $(1+a)^{n+1} \leq 1 + (2^{n+1} - 1)a$ folgt.

$$\begin{aligned} (1+a)^{n+1} &= (1+a)(1+a)^n \\ &\leq (1+a)(1+(2^n-1)a) \text{ mit der Induktionsvoraussetzung} \\ &= 1 + (2^n-1)a + a + (2^n-1)a^2 \text{ ausmultiplizieren} \\ &= 1 + (2^n - 1 + 1 + (2^n-1)a)a \text{ ausklammern} \\ &= 1 + (2^n + (2^n-1)a)a \\ &\leq 1 + (2^n + (2^n-1))a, \text{ denn } 0 \leq a \leq 1 \\ &= 1 + (2^{n+1}-1)a. \end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig ist.

WS 15/16

Aufgabe 1

Im Induktionsanfang sei $n_0 = 1$. Dann ist $A^{n_0} = A$, und $\begin{pmatrix} 1 & n_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A = A^1$. Es gilt also der Induktionsanfang.

Als Induktionsannahme nehmen wir an, dass $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für ein $n \geq 1$ gilt. Daraus müssen wir schließen, dass $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ folgt. Es gilt aber tatsächlich

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + n \cdot 0 & 1 \cdot 1 + n \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

SS 16

Aufgabe 1

Induktionsanfang: Für $n = 4$ gilt

$$2 \cdot 4 + 1 = 9 \leq 4^2 = 16 = 2^4,$$

also gilt der Induktionsanfang.

Induktionsannahme: Für ein $n \geq 4$ gilt $2n + 1 \leq n^2 \leq 2^n$.

Induktionsschritt: Zu zeigen ist $2(n+1) + 1 \leq (n+1)^2 \leq 2^{n+1}$.

Es ist

$$\begin{aligned} 2(n+1) + 1 = 2n + 3 = 2n + 1 + 2 &\leq n^2 + 2 \qquad \text{(mit Induktionsannahme)} \\ &\leq n^2 + 2 + (2n - 1) \qquad \text{(da } n \geq 4 \text{ ist } 2n - 1 \geq 0\text{)} \\ &= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2, \end{aligned}$$

also ist $2(n+1) + 1 \leq (n+1)^2$. Weiter ist

$$\begin{aligned} (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 &\leq 2^n + 2n + 1 \qquad \text{(mit Induktionsannahme)} \\ &\leq 2^n + 2^n \qquad \text{(wieder mit Induktionsannahme } 2n + 1 \leq 2^n\text{)} \\ &= 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}, \end{aligned}$$

also ist $(n+1)^2 \leq 2^{n+1}$ und insgesamt $2(n+1) + 1 \leq (n+1)^2 \leq 2^{n+1}$. Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion ist die Behauptung bewiesen.

WS 16/17

Aufgabe 1

Induktionsanfang: Es sei $n_0 = 1$. Dann ist

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \ ,$$

also gilt der Induktionsanfang.

Induktionsannahme: Wir nehmen an, dass $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$ für ein $n \geq 1$ gilt. Daraus müssen wir (im Induktionsschritt) schließen, dass $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)^3}{3} + \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{n+1}{6}$ folgt. Mit der Induktionsannahme ist aber

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 && \text{(Aufspalten der Summe)}\\
&= \tfrac{n^3}{3} + \tfrac{n^2}{2} + \tfrac{n}{6} + (n+1)^2 && \text{(Induktionsannahme)}\\
&= \tfrac{n^3}{3} + \tfrac{n^2}{2} + \tfrac{n}{6} + n^2 + 2n + 1 = \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{3}{2}n^2 + \tfrac{13}{6}n + 1 \ ,
\end{aligned}$$

und das ist tatsächlich identisch mit

$$\begin{aligned}
\frac{(n+1)^3}{3} + \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{n+1}{6} &= \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{3} + \frac{n^2 + 2n + 1}{2} + \frac{n+1}{6}\\
&= \frac{1}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{13}{6}n + 1 \ .
\end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

SS 17

Aufgabe 1

Induktionsanfang: Sei $n_0 = 1$. Mit der Produktregel für die Ableitung und der Kettenregel für die Ableitung von e^{-x} gilt

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = 2xe^{-x} + x^2(-1)e^{-x} = (2x - x^2)e^{-x} = (-1)^{n_0}(n_0(n_0-1) - 2n_0x + x^2)e^{-x}.$$

Also gilt der Induktionsanfang.

Induktionsannahme: Es gelte $f^{(n)}(x) = (-1)^n(n(n-1) - 2nx + x^2)e^{-x}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: Zu zeigen ist

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}\left((n+1)n - 2(n+1)x + x^2\right)e^{-x}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x)\\
&= \left((-1)^n(n(n-1) - 2nx + x^2)e^{-x}\right)' \text{ Induktionsannahme}\\
&= (-1)^n\left((-2n + 2x)e^{-x} + (n(n-1) - 2nx + x^2)(-1)e^{-x}\right) \text{ Produktregel für die Ableitung}\\
&= (-1)^n(-2n + 2x - n(n-1) + 2nx - x^2)e^{-x}\\
&= (-1)^n(-n(n-1+2) + 2(n+1)x - x^2)e^{-x}\\
&= (-1)^{n+1}((n+1)n - 2(n+1)x + x^2)e^{-x}
\end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

SS 18

Aufgabe 1

Wir beweisen die Behauptung mit vollständiger Induktion nach n.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist $\sum\limits_{i=1}^{1} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} = \frac{1}{1\cdot 4} = \frac{1}{4} = \frac{1}{3\cdot 1+1}$. Also gilt der Induktionsanfang.

Induktionsannahme: Es gelte $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} = \frac{n}{3n+1}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: Es ist zu zeigen, dass $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} = \frac{n+1}{3(n+1)+1} = \frac{n+1}{3n+4}$ gilt. Es ist

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} + \frac{1}{(3(n+1)-2)(3(n+1)+1)} \\
&= \frac{n}{3n+1} + \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} \qquad \text{mit der Induktionsannahme} \\
&= \frac{(3n+4)n}{(3n+1)(3n+4)} + \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} \\
&= \frac{3n^2+4n+1}{(3n+1)(3n+4)} \\
&= \frac{(3n+1)(n+1)}{(3n+1)(3n+4)} \\
&= \frac{n+1}{3n+4}.
\end{aligned}
$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

WS 18/19

Aufgabe 1

Induktionsanfang: Es sei $n_0 = 1$. Dann ist

$$\sum_{k=1}^{1} 2^k = 2 = 2^2 - 2 = 2^{n_0+1} - 2\ ,$$

also gilt der Induktionsanfang.

Induktionsannahme: Wir nehmen an, dass $\sum\limits_{k=1}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 2$ für ein $n \geq 1$ gilt. Daraus müssen wir (im Induktionsschritt) schließen, dass $\sum\limits_{k=1}^{n+1} 2^k = 2^{n+2} - 2$ folgt. Mit der Induktionsannahme ist aber tatsächlich

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} 2^k &= \sum_{k=1}^{n} 2^k + 2^{n+1} && \text{(Aufspalten der Summe)} \\
&= 2^{n+1} - 2 + 2^{n+1} && \text{(Induktionsannahme)} \\
&= 2 \cdot 2^{n+1} - 2 = 2^{n+2} - 2\ .
\end{aligned}
$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

Aufgabe 1

Induktionsanfang: Die Behauptung soll für alle $n \in \mathbb{N}$ gezeigt werden. Deshalb ist im Induktionsanfang $n_0 = 1$. Dann gilt mit der Quotientenregel für die Ableitung

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{(e^x)^2} = \frac{1-x}{e^x} = \frac{(-1)(x-1)}{e^x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit gilt der Induktionsanfang.

Induktionsannahme: Sei nun $n \in \mathbb{N}$, und es gelte $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n(x-n)}{e^x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Induktionsschritt: Es ist zu zeigen, dass für das n aus der Induktionsannahme gilt: $f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(x-(n+1))}{e^x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Sei nun also $x \in \mathbb{R}$. Es ist

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = \left(\frac{(-1)^n(x-n)}{e^x}\right)'.$$

Zur Berechnung der Ableitung benutzen wir die Quotientenregel und erhalten

$$\begin{aligned}\left(\frac{(-1)^n(x-n)}{e^x}\right)' &= (-1)^n\frac{e^x-(x-n)e^x}{(e^x)^2} = (-1)^n\frac{1-(x-n)}{e^x} = (-1)^n\frac{-x+(n+1)}{e^x} \\ &= (-1)^n\frac{(-1)(x-(n+1))}{e^x} = \frac{(-1)^{n+1}(x-(n+1))}{e^x}.\end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt nun, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.